Corso di fisica II

Prova scritta del secondo modulo del 24/06/08

Esercizio 1

Per risolvere questo problema utilizziamo il principio di sovrapposizione. Al campo elettrico esterno sommiamo gli effetti della polarizzazione nel mezzo; per le cavità sottraiamo il campo che sarebbe associato a due sfere di materiale dielettrico (attenzione: nello spazio della cavità bisogna sottrarre il campo interno della sfera corrispondente e il campo esterno della sfera relativa all'altra cavità).
Su ciascuna sfera dovrebbe esserci poi un'ulteriore correzione sulla polarizzazione a causa del campo elettrico derivante dal campo esterno dell'altra sfera: per il momento questo effetto viene trascurato e una volta svolti i conti possiamo verificare la bontà di tale ipotesi.

Fissiamo l'origine del nostro SR nel punto di tangenza delle due sfere, con l'asse y diretto lungo la congiungente i due centri e positivo verso destra.

Iniziamo a calcolare la polarizzazione del liquido:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E_0}$$

Il campo elettrico all'interno di una sfera di dielettrico polarizzata da un campo esterno uniforme è:

$$\vec{E}^{P}_{\text{int}} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

Consideriamo ora l'effetto del campo esterno di ciascuna sfera sull'altra cavità: per la cavità di destra ($0 < y < 2R$) abbiamo:

$$\vec{E}^{P}_{ext} = \frac{2\vec{P}}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{R^3}{(R+y)^3}$$

Per la cavità di sinistra ($-2R < y < 0$) analogamente:

$$\vec{E}^{P}_{ext} = \frac{2\vec{P}}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{R^3}{(R-y)^3}$$

In definitiva il campo elettrico vale

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_0}{3} - \frac{2(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_0}{3} \cdot \frac{R^3}{(R-y)^3} \quad \text{per } -2R < y < 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_0}{3} - \frac{2(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_0}{3} \cdot \frac{R^3}{(R+y)^3} \quad \text{per } 0 < y < 2R$$

Nota: gli effetti della polarizzazione e delle cavità sono piccoli rispetto al campo esterno che li produce. L'effetto del campo esterno di una sfera sulla polarizzazione della sfera vicina è di secondo ordine rispetto a E_0.

Prima di calcolare la differenza di potenziale tra i centri delle due sfere nella configurazione presentata, osserviamo che la ddp dovuta al solo campo esterno è di 4.00 V (10 V/m con uno spostamento di 40 cm).

Per la differenza di potenziale integriamo sullo spazio da $-R$ a $+R$ il campo totale:

$$\Delta\phi = \int_{-R}^{+R} \vec{E} \cdot dy = 2RE_0 + \frac{2R(\varepsilon_r - 1)E_0}{3} - \frac{1(\varepsilon_r - 1)E_0}{2} R = E_0 R \cdot \left(2 + \frac{1}{6}(\varepsilon_r - 1)\right) = 4.02V$$

Esercizio 2

La f.e.m indotta nella spira è dovuta alla variazione del flusso del campo magnetico. Il campo magnetico è costante nel tempo, ma il movimento della spira fa sì che il flusso cambi.
La variazione di flusso rispetto allo spostamento dx è:

$$\frac{d\Phi}{dx} = 2dB$$

La spira si muove di moto armonico, per esempio di equazione

$$x_C = x_0 + \frac{d}{2}\sin(\omega t)$$

differenziando:

$$\dot{x}_C = \frac{d}{2}\omega\cos(\omega t)$$

Quindi la variazione di flusso magnetico per unità di tempo vale:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = 2dB\cdot\frac{d}{2}\omega\cos(\omega t) = Bd^2\omega\cos(\omega t) = f.e.m$$

Dalla legge di Ohm la corrente nella spira:

$$I = \frac{f.e.m}{R} = \frac{Bd^2\omega\cos(\omega t)}{R}$$

La potenza dissipata per effetto Joule è la corrente per la tensione.
L'energia dissipata in un certo intervallo di tempo si ottiene integrando rispetto al tempo la potenza.

$$E = 5\cdot\int_0^T \frac{\left[Bd^2\omega\cos(\omega t)\right]^2}{R}dt = \frac{5}{2}T\cdot\frac{\left[Bd^2\omega\right]^2}{R} = \frac{5\pi\omega}{R}B^2d^4 = 1.6J$$

Per l'integrale si è utilizzata la seguente:

$\int_0^T \left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right]\cdot dt = T$, quindi $\int_0^T \cos^2(\omega t)\cdot dt = T/2$.